PENGANTAR

Saya berpendapat bahwa *"Matematika adalah pelajaran yang mudah dan sederhana"*, hal ini didasarkan pada pengalaman saya selama mempelajari Matematika selama tiga tahun di SMA (salah satu pelajaran favorit saya) dan pengalaman mengajar privat anak – anak SMA selama lima tahun.

Matematika menjadi mudah bagi saya karena saya melihatnya sebagi suatu rumus jadi yang langsung bisa diaplikasikan untuk menjawab soal, dan hebatnya lagi pengalaman membuktikan bahwa soal-soal tersebut demikian adanya dari dulu sampai sekarang. Lantas kenapa beberapa murid yang saya temui menganggap *"Matematika sebagai suatu hal yang sulit dan kompleks"* , padahal di SMA hanya memerlukan **2M** untuk mempelajari Matematika yaitu **Mengingat** dan **Mengulang**

Pengalaman kuliah di jurusan Matematika FMIPA UGM, memberikan pemahaman lebih mendalam kepada saya tentang Matematika, dan ternyata saya menyadari bahwa pendapat "*Matematika sebagai suatu hal yang sulit dan kompleks"* adalah benar adanya. Suatu hal yang tidak pernah terpikirkan oleh saya sewaktu SMA dulu yang telah dipikirkan oleh beberapa murid SMA yang saya ajar.

Kesulitan tersebut saya dapatkan karena saya tidak lagi mempelajari rumus jadi dan soal, tetapi saya harus mulai memikirkan darimana rumus tersebut berasal dan apa aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari. Beberapa permasalahan malah tidak bisa dipecahkan dengan hitungan matematis, tetapi memakai hitungan logika. Saya harus mempertanyakan suatu rumus atau theorema dengan menjawab pertanyaan **5 W** (*Why, When, Where, Who, What*) dan **1 H** (*How* to).

Buku ini dimaksudkan untuk memberikan pemahaman **5 W** terhadap anak-anak SMA terhadap Matematika (terutama kalkulus), sehingga tingkat pemahaman mereka terhadap Matematika bukan sebatas **1 H.** Dalam buku ini saya hanya mengambil sebagian rumus atau teorema saja disertai dengan sejarahnya, dengan harapan dapat memberikan motivasi bagi anak untuk lebih mengerti dan memahami tentang Matematika

PENDAHULUAN

Apabila anda telah lulus SMA dan masuk ke PT maka anda akan mendapatkan mata kuliah Kalkulus di silabus kurikulum dasar. Kalkulus ini sebetulnya adalah bagian dari Matematika yang sebetulnya sebagian besar telah kita pelajari di SMA.

Sejarah Kalkulus dapat kita temukan pertama kali di Yunani dimana para ahli matematikanya mengalami kesulitan dalam menghitung keliling dengan menggunakan panjang, luas, dan volume, sampai kemudian Archimedes memberikan solusi untuk permasalahan tersebut (Archimedes adalah cikal bakal penemu kalkulus tertua yang hidup tahun 225 Sebelum Masehi), baru kemudian beberapa tokoh besar setelah Masehi mulai mengenalkan kalkulus sebagai bagian dari Matematika yang cukup penting.

Dalam bagian selanjutnya dari buku ini, kita akan mengenal beberapa tokoh penting dibalik layar beserta kontribusinya terhadap kalkulus. Sedang di bagian akhir akan ada contoh aplikasi sehari-hari yang bisa diselesaikan menggunakan pendekatan kalkulus.

Dalam bagian isi akan ada 9 tokoh yang berpengaruh dalam kalkulus, setiap tokoh akan dikupas tersendiri disertai dengan konsep dasar dan kesimpulan. Pada konsep dasar akan diambil sebagian rumus atau teorema saja karena tujuan buku ini bukan sebagai kumpulan rumus atau teorema lengkap, tetapi sebagai buku motivasi bagi pelajar untuk sedikit mengenal filosofi dari matematik, terutama kalkulus.

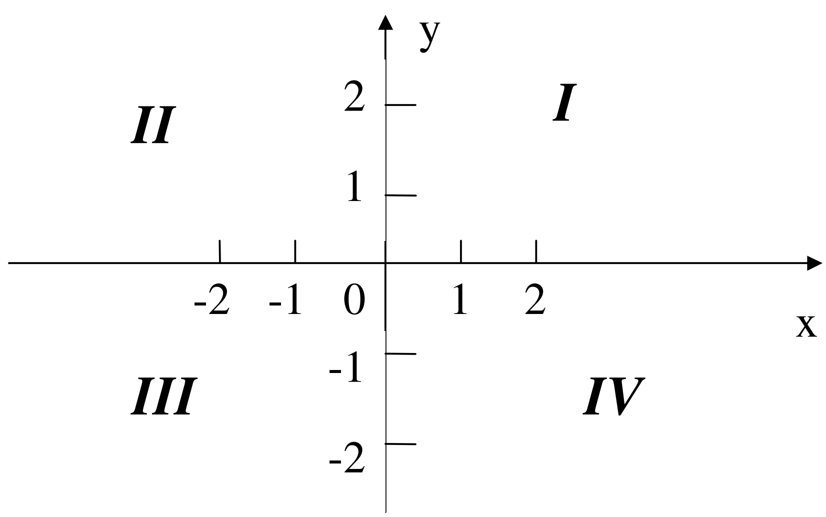
ISI

Rene Descartes (1596 – 1650)

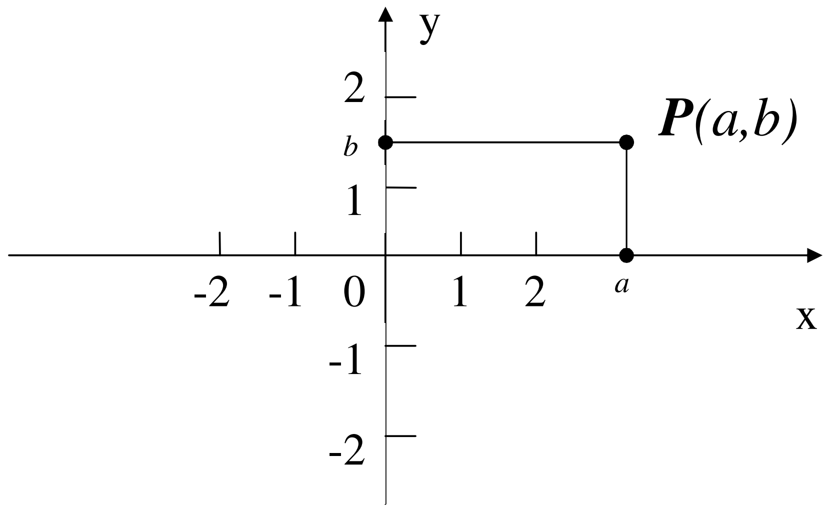
Lahir di Prancis dan seorang sarjana hukum yang juga seorang ahli matematika. Karyanya yang terbesar adalah La Geometrie (1637) yang menggabungkan geometri tua dengan aljabar yang pada waktu itu masih baru. Bersama dengan teman sejawatnya, orang Prancis juga yaitu Pierre Fermat (1601 – 1665) melahirkan suatu pemikiran besar di bidang matematika yaitu geometri analitik atau geometri koordinat. Kebiasaan unik yang dilakukan oleh Rene Descartes sepanjang hidupnya adalah menghabiskan waktu paginya dengan belajar di tempat tidur.

Konsep dasar:

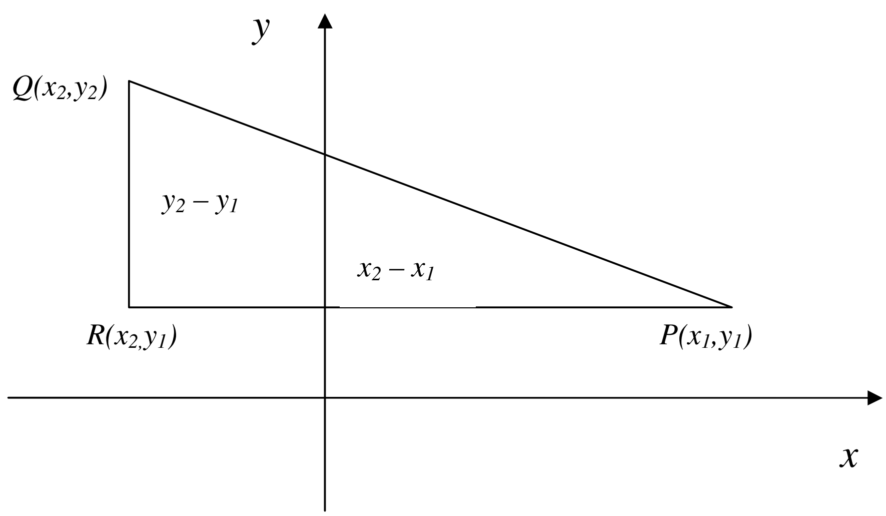
- Gambarlah garis horizontal (sumbu x) dan garis vertical (sumbu y). Kedua garis tersebut akan saling berpotongan di **titik asal** (label 0). Rene Descartes memberi nama koordinat ini sebagai **koordinat cartesius**. Sumbu x dan sumbu y ini disebut sebagai **sumbu koordinat** yang membagi empat daerah yang dinamakan **kuadran** yang diberi label I, II, III, dan IV.



- Berikutnya kita akan menaruh satu titik *P* di koordinat tersebut. Titik *P* tersebut dapat dinyatakan sebagai sepasang bilangan, yang memiliki **koordinat** *P(a,b)*, dimana *a* disebut sebagai **absis** dan *b* disebut sebagai **ordinat.**



- Sekarang kita akan mencoba untuk membuat suatu penemuan lagi dari koordinat cartesius tersebut. Kita akan menggambar segitiga seperti pada gambar di bawah ini.



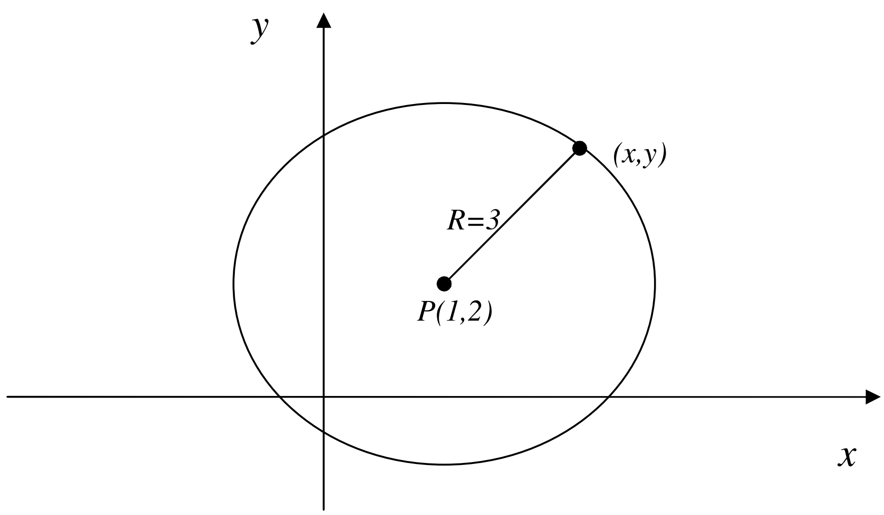
Pythagoras mengatakan bahwa *" panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah akar kwadrat dari jumlah kwadrat kedua sisi lainnya"*, sehingga segitiga di atas akan memiliki persamaan sbb:

$$(PR)^2 + (RQ)^2 = (PQ)^2$$
$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = [d(P,Q)]^2$$
$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

☺ **Bravo!** Kita telah menemukan **rumus jarak** antara titik $P(x_1,y_1)$ dan $Q(x_2,y_2)$ adalah

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Sebelumnya kita telah menggambar segitiga pada koordinat cartesius dan telah menemukan **rumus jarak**, berikutnya kita akan menggambar lingkaran pada koordinat cartesius yang memiliki pusat (1, 2) dan jari-jari 3



Seandainya (x,y) adalah sembarang titik pada lingkaran maka menurut **rumus jarak** , jarak dari P(1,2) ke (x,y) adalah

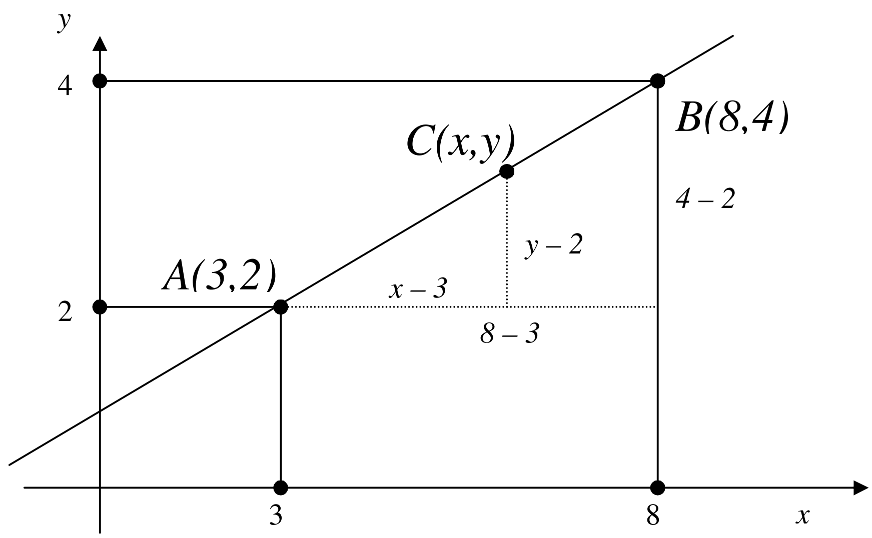
$$3 = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2}$$
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$

☺ **Eureka!** Dari persamaan tersebut kita telah menemukan **persamaan lingkaran** dengan jari-jari r dan pusat (a,b) adalah

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- *catatan: kita bisa menggambar ellips, parabola, hyperbola, atau bangun yang lain untuk menemukan persamaan yang lain..*

- Selanjutnya kita akan membuat garis lurus sederhana pada koordinat cartesius temuan Descartes tersebut.



garis yang kita buat melalui titik A(3,2) dan B(8,4) akan memiliki **kemiringan**

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{8-3} = \frac{2}{5}$$

apabila kita menaruh titik C(x,y) pada garis tersebut, maka AC akan memiliki **kemiringan**

$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{y-2}{x-3}$$

kita bisa melihat pada gambar tersebut bahwa titik A, B, dan titik C akan memiliki kemiringan yang sama, sehingga

$$m_{AB} = m_{AC}$$

$$\frac{2}{5} = \frac{y-2}{x-3}$$

$$y - 2 = \frac{2}{5}(x-3)$$

☺ **Bravo!** Kita telah menemukan **kemiringan titik dari persamaan sebuah garis** pada titik (x_1, y_1) dengan kemiringan m adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Kita akan membuat sedikit modifikasi pada persamaan di atas, apabila nilai $x_1=0$ dan $y_1=0$ maka

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = m(x - 0)$$
$$y = mx + c$$

Dimana c dapat kita sebut sebagai suatu konstanta

☺ **Eureka! Kemiringan perpotongan dari persamaan sebuah garis** dengan kemiringan m dan suatu konstanta c adalah

$$y = mx + c$$

Kita akan mengadakan sedikit perhitungan pada persamaan garis berikut

$$y - 2 = 4(x + 2)$$
$$y - 2 = 4x + 8$$
$$y = 4x + 10$$
$$4x - y + 10 = 0$$

bentuk diatas dapat kita tulis ulang persamaan garis tersebut sebagai

$$Ax + By + C = 0$$

☺ Bravo! **Persamaan garis umum** atau **persamaan linear umum** sebuah garis adalah

$$Ax + By + C = 0$$

kesimpulan

Pada akhir bab ini kita telah mencoba untuk menyelami pemikiran Descartes tentang Koordinat Cartesius dan telah menemukan lima rumus berkaitan dengan koordinat Cartesius tersebut, yaitu: rumus jarak, persamaan lingkaran, kemiringan titik, kemiringan perpotongan, dan persamaan garis umum sebuah garis.

Augustin – Louis Cauchy (1789 – 1857)

Lahir di Paris dan dididik di Ecole Polytechnique. Ia menjadi guru besar di Ecole Polytechique, Sorbone, dan College de France. Produktivitas pemikirannya sangatlah tinggi sehingga Academy Paris memilih untuk membatasi ukuran makalahnya dalam majalah ilmiah. Walaupun kalkulus diciptakan pada akhir abad 17, dasar-dasarnya tetap kacau dan berantakan sampai Cauchy dan teman sejawatnya (Gauss, Abel, dan Bolzano) mengadakan ketelitian baku. Cauchy memberikan pemikiran dasar kalkulus pada definisi yang jelas dari konsep limit.

Konsep dasar

Konsep limit membedakan kalkulus dengan cabang matematika yang lain. Bahkan ada yang mendefinisikan kalkulus adalah pengkajian tentang limit. Sebelum kita mendalami pemikiran Cauchy kita akan melihat fungsi berikut:

Fungsi pertama

$$f(x) = x - 1$$

Apabila x = 1 maka kita akan mendapatkan $f(1) = 1 - 1 = 0$

Fungsi kedua

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Apabila x=1 maka kita akan mendapatkan $f(0) = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$

Catatan:
Suatu bentuk yang boleh dikatakan tidak berarti karena pembagian dengan 0 (ini disebut sebagai bentuk tak tentu)

Dari *fungsi kedua*, kita akan mencoba untuk mencari tahu apabila x mendekati 1 seperti dalam tabel berikut beserta hasilnya

X	*0,75*	*0,9*	*0,99*	*0,999*	*1*	*1,001*	*1,01*	*1,1*
f(x)	*1,75*	*1,9*	*1,99*	*1,999*	*?*	*2,001*	*2,01*	*2,1*

Dari tabel tersebut dapat ditarik kesimpulan bahwa apabila *x* mendekati 1 maka *f(x)* akan mendekati 2. Oleh Cauchy hal ini dituliskan sebagai berikut

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Pendekatan kedua untuk menyelesaikan persoalan limit adalah dengan menggunakan pendekatan aljabar sbb:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = (1+1) = 2$$

☺ **Mengagumkan bukan!** Suatu metode cerdik untuk menyelesaikan limit fungsi dengan metode aljabar.

Kesimpulan

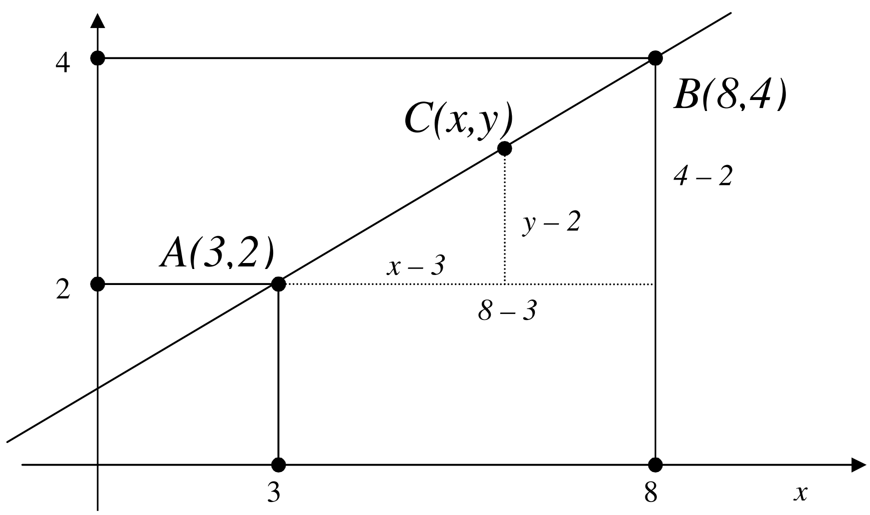
Pada akhir bab ini, kita telah melihat bahwa Cauchy telah meletakkan konsep limit sebagai cikal bakal lahirnya kalkulus. Pendekatan aljabar untuk menyelesaikan persoalan limit fungsi merupakan metode cerdik yang pernah ditemukan dalam kalkulus dan masih dipakai sampai sekarang

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Lahir di Leipzig, Jerman. Ia mendaftar di Universitas Leipzig dan meraih gelar doctor dari Universitas Altdorf. Bersama dengan Isaac Newton (1642 – 1727), ia membagi penghargaan untuk penemuan kalkulus. Pertentangan antara Jerman dan Inggris memberikan dampak yang cukup menyedihkan buat Leibniz. Sejarah mencatatkan Newton sebagai penemu kalkulus pertama, tetapi kenyataan bahwa Leibniz juga menemukannya secara tersendiri tidak mendapat perhatian, Ia meninggal sebagai seorang yang kesepian bahkan pemakamannya hanya dihadiri oleh seorang pelayat, yaitu sekretarisnya. Leibniz adalah pencipta lambang matematis terbesar, dari pemikirannya muncul nama – nama seperti kalkulus diferensial, kalkulus integral, fungsi, dan kesamaan. Perkembangan pesat kalkulus di Eropa daripada di Inggris disebabkan oleh keunggulan perlambangannya.

konsep dasar

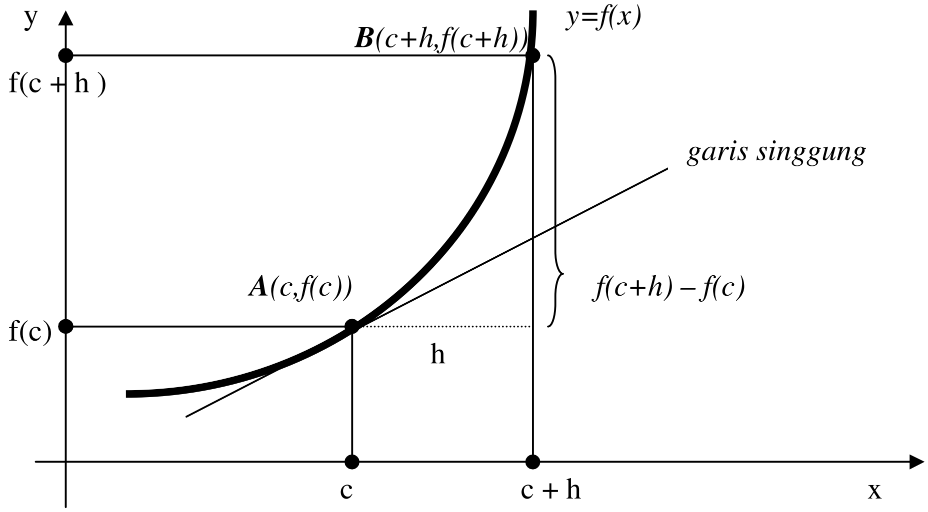
kita akan mengingat kembali konsep kemiringan garis pada bab sebelumnya.



Garis yang kita buat melalui titik A(3,2) dan B(8,4) akan memiliki **kemiringan**

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{8-3} = \frac{2}{5}$$

Kemiringan di atas sangat mudah ditemukan karena grafiknya berupa garis lurus. Bagaimana jika grafiknya seperti pada gambar berikut:



Pada grafik di atas titik *A(c,f(c))* dan titik *B(c+h,f(c+h))* akan memiliki kemiringan

$$m_{AB} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Kita berhutang pada Cauchy yang menemukan konsep limit sehingga dapat menemukan kemiringan grafik di atas.

Selanjutnya kita akan memberi nama m_{AB} ini sebagai kemiringan garis AB yang sebetulnya identik dengan $m_{AB} = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$

Definisi ini memunculkan konsep baru dalam kalkulus yang dinamakan sebagai **turunan**

Turunan fungsi *f* adalah fungsi *f'* (*dibaca f aksen*) yang nilainya pada sembarang bilangan c adalah

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

catatan:
Apabila limit ini ada maka dikatakan bahwa f ***terdiferensialkan*** *(terturunkan) di c, pencarian turunan disebut* ***pendiferensialan****; bagian kalkulus yang berhubungan dengan turunan disebut* ***kalkulus diferensial****.*

Leibniz memberikan kontribusi besar dalam penulisan notasi turunan yang dikenal sebagai penulisan Leibniz, seperti tampak pada tabel berikut:

Turunan	*Penulisan f aksen*	*Penulisan y aksen*	*Penulisan d*	*Penulisan Leibniz*
Pertama	$f'(x)$	y'	$D_x y$	$\frac{dy}{dx}$
Kedua	$f''(x)$	y''	$D_x^2 y$	$\frac{d^2 y}{dx^2}$
Ketiga	$f'''(x)$	y'''	$D_x^3 y$	$\frac{d^3 y}{dx^3}$
Keempat	$f''''(x)$	y''''	$D_x^4 y$	$\frac{d^4 y}{dx^4}$
Kelima	$f^{(5)}(x)$	$y^{(5)}$	$D_x^5 y$	$\frac{d^5 y}{dx^5}$
Ke - n	$f^{(n)}(x)$	$y^{(n)}$	$D_x^n y$	$\frac{d^n y}{dx^n}$

Dari tabel di atas tampak bahwa Leibniz memberikan penulisan yang lebih manis daripada yang lain.

kesimpulan

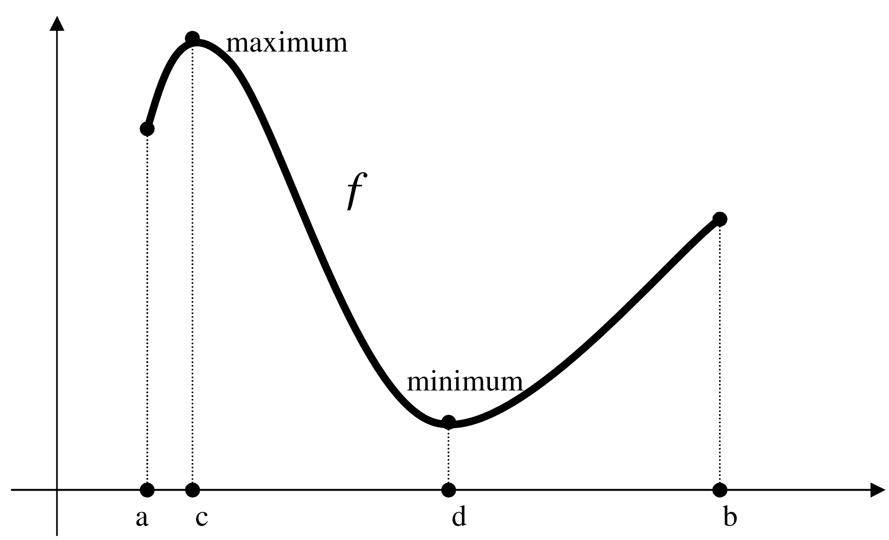
Banyak hal di dalam kalkulus diferensial menjadi terungkap dan mudah dengan penulisan notasi Leibniz ini. Berikutnya kita akan melihat penerapan turunan oleh Newton yang sering disebut sebagai Bapak Kalkulus.

Isaac Newton (1642 – 1727)

Lahir di Inggris dari keluarga petani. Newton adalah seorang pemuda yang bosan dengan sekolah dan lebih senang membuat layangan, roda air, jam dan perkakas lain. Pamannya yang melihat bakat dari diri Newton menyekolahkannya di Trinity College. Hasilnya Newton mendapatkan gelar kemahaguruan dari Isaac Barrow (seorang pakar ilmu agama dan mahaguru matematika). Dalam waktu singkat Newton menemukan teorema binomial umum, elemen dari kalkulus diferensial dan integral, teori warna, dan hukum gravitasi universal. Lagrange (1736 – 1813) memuji Newton sebagai seorang jenius terbesar yang pernah hidup.

Konsep dasar

Banyak hal yang bisa digali dari pemikiran Newton, salah satunya adalah konsep maximum dan minimum suatu fungsi.



Pada gambar di atas fungsi *f* dibatasi oleh titik a dan b yang bisa kita tuliskan sebagai selang I=[a,b], titik a dan titik b ini kemudian kita sebut sebagai **titik-titik ujung**.

Dari $f'(x)=0$, kita menemukan titik c dan titik d yang kemudian kita sebut sebagai **titik-titik stasioner.** Dari definisi di atas kita dapat membuat suatu teorema yang kemudian kita sebut sebagai **teorema titik kritis**

Teorema Titik Kritis – andaikan f didefinisikan pada selang I=[a,b] yang memuat titik c. Jika c adalah titik ekstrim, maka c haruslah suatu titik kritis, yakni c berupa salah satu:

a. titik ujung dari I
b. titik stasioner dari *f(f'(c)=0)*
c. titik singular dari *f(f'(c) tidak ada)*

Dari **teorema titik kritis** di atas kita dapat membuat suatu prosedur untuk mencari nilai maximum dan minimum suatu fungsi kontinu *f* pada selang tertutup *I.*

Contoh

kita akan mencari nilai maximum dan minimum dari fungsi

$$f(x) = -2x^3 + 3x^2 \text{ yang memiliki selang } \left[\frac{-1}{2}, 2\right]$$

solusi:

Hal pertama yang perlu kita lakukan adalah mencari titik-titik kritis fungsi tersebut.

a. titik kritis pertama adalah titik ujung dari selang yaitu $x = \frac{-1}{2}$ dan $x = 2$

b. titik kritis kedua adalah titik stasioner dari fungsi tersebut yang dapat kita cari dengan

$$f'(x) = 0$$
$$-6x^2 + 6x = 0$$
$$-6x(x-1) = 0$$
$$x = 0 \cup x = 1$$

kita telah mendapatkan titik kritis kedua yaitu titik stasioner *x = 0* dan *x = 1*

c. cari nilai fungsi di titik-titik kritis tersebut, didapat:

$$f(\frac{-1}{2}) = 1$$
$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1$$
$$f(2) = -4$$

Tampak dari hasil tersebut bahwa nilai maximum fungsi adalah 1 (dicapai pada x = -1/2 dan x = 1) dan nilai minimum fungsi adalah - 4 (dicapai pada x = 2).

Kesimpulan

Dari contoh diatas kita tarik suatu kesimpulan bahwa turunan telah terbukti sebagai suatu metode yang cukup efektif dalam menghitung permasalahan maximum dan minimum suatu fungsi, hebatnya lagi kita tidak perlu menggambar grafik fungsi tersebut. Banyak permasalahan praktis maximum dan minimum sehari-hari yang dapat dipecahkan dengan metode ini.

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866)

Rieman meraih gelar Ph D di bawah Gauss dari Universitas Gottingen. Dimana kemudian dia memilih tinggal di Gottingen dan mengajar di sana. Hidupnya sangat singkat, hanya 39 tahun tetapi Rieman menghasilkan makalah – makalah matematika yang menetapkan arah baru dalam teori fungsi kompleks, memprakarsai studi mendalam tentang apa yang sekarang ini disebut topologi, dan dalam geometri memulai perkembangan yang memuncak 50 tahun kemudian dalam teori relativitas Einstein. Walaupun Newton dan Leibniz disebut sebagai penemu integral dan teorema dasar dari kalkulus integral, tetapi Riemanlah yang memberikan definisi modern tentang integral tentu. Yang kemudian untuk menghormatinya disebut Integral Riemann.

Konsep dasar

Ada beberapa teorema dasar dalam Matematika, yaitu:

Teorema dasar aritmatika
sebuah bilangan bulat dapat difaktorkan secara tunggal menjadi hasil kali dari bilangan-bilangan prima.

Teorema dasar aljabar
sebuah persamaan polinom derajat n tepat mempunyai n penyelesaian (akar), termasuk yang berulang.

Teorema dasar kalkulus

Teorema dasar kalkulus – andaikan *f* kontinu (karenanya terintegralkan) pada [a,b] dan andaikan *F* sebarang anti turunan dari *f* di atas, maka

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Munculnya integral bermula dari operasi invers dalam matematika seperti:

- penambahan dan pengurangan
- perkalian dan pembagian
- pemangkatan dan penarikan akar
- **pendiferensialan dan anti pendiferensialan**

contoh:

Apabila $y = \frac{1}{3}x^3 + 2$ maka $\frac{dy}{dx} = x^2$ (pendiferensialan)

Kita bisa membalik operasi di atas menjadi

$\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + c$ (anti pendiferensialan)

Kesimpulan

Integral (anti pendiferensialan) sebetulnya merupakan operasi balikan dari pendiferensialan. Konsep ini bermula dari adanya fenomena operasi balikan dari matematika seperti penambahan/pengurangan, perkalian/pembagian, dsb.

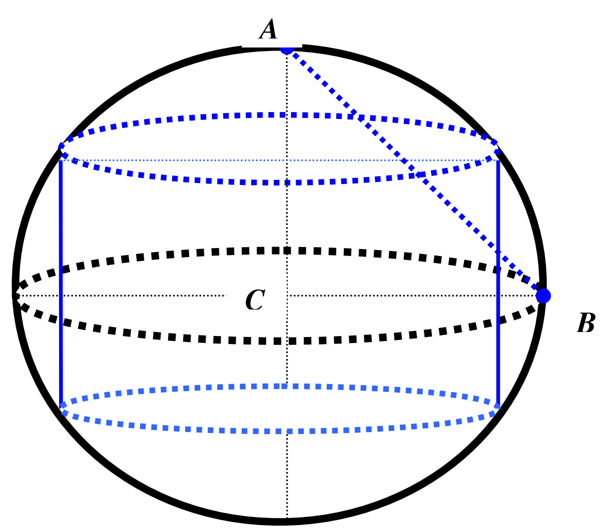
Rieman memberikan ide yang cukup kuat bagi Newton dan Leibniz yang kemudian melahirkan **teorema dasar kalkulus**.

Archimedes (287 – 212 BC)

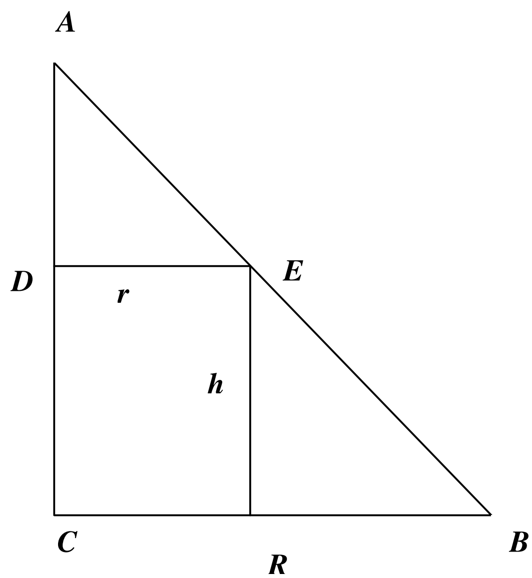
Archimedes merupakan matematikawan terbesar dari zaman purbakala. Ia dikenal sebagai pencipta dan penemu praktis. Beberapa ciptaannya seperti sekrup Archimedes, model mekanis gerakan bulan dan planet, dan prinsip daya apung Archimedes. Tulisannya di bidang matematika dicurahkan ke bagian matematika yang sekarang dikenal sebagai kalkulus integral. Dengan memakai metode keletihan ia menjumlahkan sejumlah besaran-besaran yang sangat kecil. Sumbangan lainnya adalah rumus luas lingkaran, luas dari potongan parabol, luas elips, volume dan luas permukaan bola, volume kerucut dan benda putar lain. Ia bahkan meminta kepada temannya agar di atas batu nisannya diletakkan sebuah bola berisi tabung berukir, ditulisi dengan hasil bagi volume bola dan tabung tersebut.

Konsep dasar:

Untuk menghormati keinginan Archimedes di saat terakhirnya, kita akan membuat sebuah bola dengan tabung didalamnya. Seandainya kita mempunyai bola dengan jari-jari ***R*** dan tabung dengan jari-jari ***r*** maka kita akan mencari persamaan yang timbul dari kedua parameter tersebut.



Lihat segitiga ABC diatas:



AC=CB=R=jari-jari bola
DE=CR=jari-jari tabung
CD=RE=tinggi tabung
Maka:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{AD}{DE} = \frac{ER}{RB}$$

$$\frac{R}{R} = \frac{R-h}{r} = \frac{h}{R-r}$$

$$1 = \frac{R-h}{r} = \frac{h}{R-r}$$

$$(R-h)(R-r) = hr$$

$$R^2 - rR - hR + hr = hr$$

$$R^2 - (r+h)R = 0$$

misalkan kita mempunyai bola dengan *R=3* maka

$$R^2 - (r+h)R = 0$$

$$3^2 - (r+h)3 = 0$$

$$9 - 3r - 3h = 0$$

$$3 - r - h = 0$$

$$h = 3 - r$$

apabila kita bandingkan volume bola dengan volume tabung (seperti yang diminta oleh Archimedes) maka kita akan dapatkan

$$\frac{V_{bola}}{V_{tabung}} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^2}{\pi r^2 h} = \frac{4R^2}{3r^2 h}$$

kesimpulan

Archimedes membuat suatu kontribusi penting di Yunani sekitar tahun 225 SM, lewat pemikirannya kita mengenal volume dan keliling sebuah lingkaran, volume dan luas kerucut dengan alas berbentuk ellips,volume dari semua bagian revolusi paraboloid dan sebagian untuk bagian revolusi hyperboloid.

Leonard euler (1707 – 1783)

Lahir di dekat Basel, Swiss, ia belajar pada Johann Bernoulli dan telah menerbitkan makalah – makalah pada usia 18 tahun. Pengarang matematika paling subur dalam sejarah. Ia memperkenalkan e sebagai bilangan dasar untuk logaritma asli. Kebutaan selama 17 tahun terakhir dari hidupnya tidak menghambat karyanya. daya ingatnya sangat luar biasa, ia mengetahui rumus-rumus trigonometri dan analisis, ditambah banyaknya puisi dan seluruh aenid. Bahkan kabarnya dia telah mengerjakan suatu perhitungan sampai 50 posisi decimal di kepalanya.

Konsep dasar

Lewat pemikiran euler kita, dalam kalkulus kita bukan mengenal fungsi aljabar semata tetapi juga fungsi transenden. Fungsi transenden ini meliputi: fungsi logaritma, fungsi eksponen, fungsi trigonometri, fungsi hiperbol, dan fungsi invers.

Lewat euler juga kita mengenal persamaan pertumbuhan dan peluluhan eksponensial yaitu $y = y_o e^{kt}$

Sebagai contoh pada permulaan tahun 1975, penduduk dunia diperkirakan sebanyak 4 milyard. Menjelang tahun 2000 menjadi 6,6 milyard. Kita dapat meramalkan setelah berapa tahunkah lewat 1975, penduduk dunia akan mencapai 8 milyard ?

Kita akan membandingkan fakta di lapangan dengan persamaan tersebut. Pada tahun 1975 kita akan mempunyai k=0,0198 (dari pengamatan) dan y_0=4 (satuan milyard) berarti kita memiliki persamaan:

$$y = 4e^{0,0198t}$$

sehingga pada tahun 2000, berarti t = 25 kita dapat melihat bahwa

$$y = 4e^{0,0198(25)} \approx 6,6 milyar$$

apabila y = 8 milyar maka kita akan memiliki persamaan

$$8 = 4e^{0,0198t} \rightarrow t = 35 tahun$$

jadi kita dapat membuat estimasi bahwa setelah 35 tahun (dari tahun 1975) penduduk dunia akan mencapai 8 milyar.

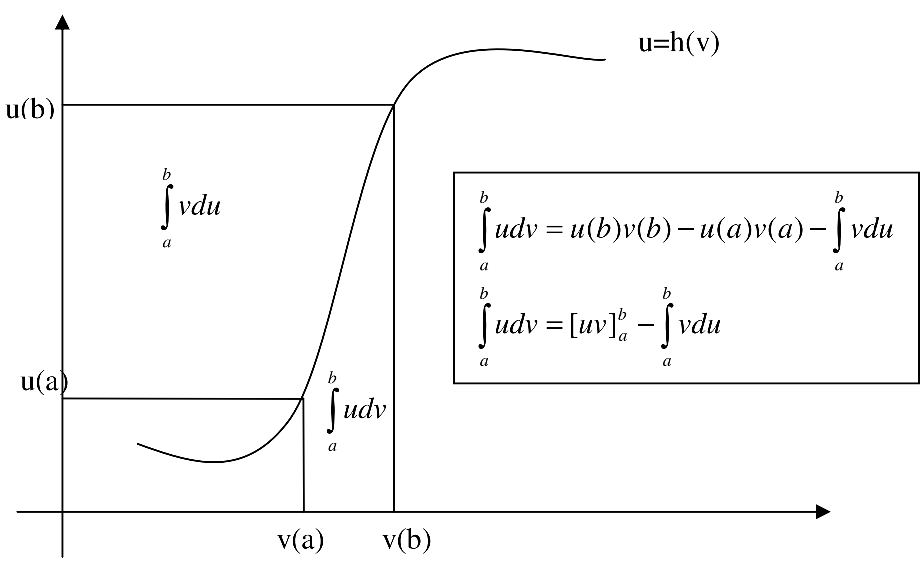
Kesimpulan

Di tangan euler, kalkulus menjadi sedemikian kompleks sehingga dapat memecahkan persoalan-persoalan yang melibatkan fungsi-fungsi transenden (selain fungsi aljabar). Kontribusi terbesar euler adalah pengenalan bilangan e yang pada akhirnya banyak dipakai dalam pertumbuhan dan peluruhan suatu unsur kimia, dan lewat fungsi eksponenya kita dapat menemukan perhitungan bunga majemuk yang dipakai oleh bank-bank saat ini.

Johan Bernoulli (1667 – 1748)

johan dan saudaranya Jacquess, setelah Newton dan Leibniz, merupakan perintis-perintis terpenting dari kalkulus, keduanya bersaing sengit satu sama lain. Bernoulli menangani semua jenis masalah dasar dalam kalkulus, termasuk titik-titik balik, panjang kurva, deret tak terhingga, dan teknik pengintegralan. Johan menulis buku ajar kalkulus yang pertama tahun 1691 dan 1692, tetapi bagian tentang kalkulus integral tidak diterbitkan sampai tahun 1742 dan tentang kalkulus diferensial sampai tahun 1924. sebagai gantinya pada tahun 1696, Hospital, mahasiswa Johan, menerbitkan naskah kalkulus yang pertama dengan bentuk yang diubah sedikit dari karya gurunya. Pengaruh Johann yang paling baik dapat dilihat pada mahasiswanya , Leonhadd Euler.

Konsep dasar



$$\int_a^b udv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b vdu$$

$$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$$

Rumus di atas disebut sebagai **integral parsial**

Kesimpulan

Di tangan bernouli kita mengenal beberapa metode pengintegralan secara lebih mendalam. Lewat pemikirannya kita mengenal yang dinamakan metode pengintegralan dengan penggantian, pengintegralan parsial, pengintegralan trigonometri, dan pengintegralan fungsi rasional.

Guillaume F.A. de l'Hospital (1661 – 1704)

Lahir dari orang tua bangsawan Prancis. Dengan sedikit bakat matematika dan banyak uang, ia menunjang Johann Bernoulli untuk menerbitkan penemuan-penemuannya. Karyanya yang dikenal dengan nama Aturan l'Hospital sebetulnya merupakan karya Johann Bernoulli, hanya saja Bernoulli tidak memiliki bukti untuk menuntutnya. Sampai kemuidan pada tahun 1955, surat-surat antara Bernoulli dan l'Hospital membenarkan tuntutan Bernoulli. Submangan l'Hospital yang lain adalah buku pelajaran pertama tentang kalkulus differensial, yang diterbitkan tahun 1696.

Konsep dasar

Masih ingat Cauchy yang menyelesaikan limit dengan pendekatan aljabar (yang kemudian kita sebut sebagai suatu metode yang sangat *cerdik* untuk menyelesaikan bentuk tak tentu)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x+1)=(1+1)=2$$

L'Hospital menerbitkan suatu buku yang berisi yang mengenalkan metode *supercerdik* untuk menyelesaikan limit tak tentu yang disebut sebagai **teorema L'Hospital.**

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

yang berarti soal di atas dapat diselesaikan sebagai berikut

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2.1=2$$

sangat cerdik bukan !

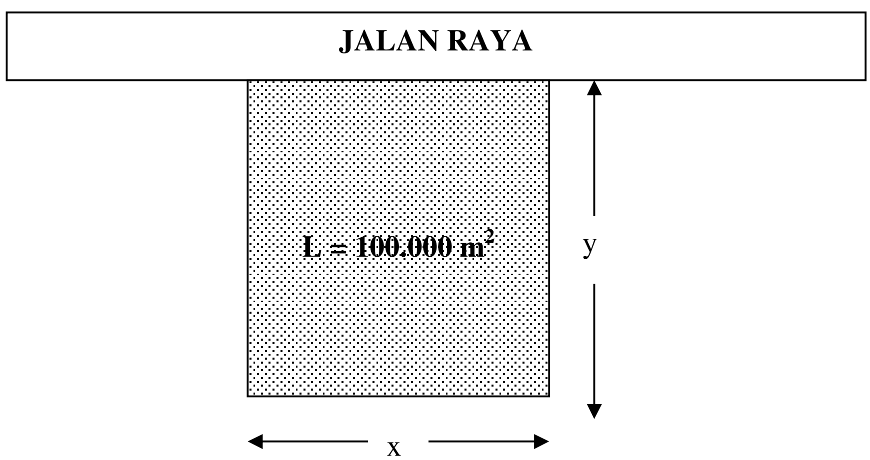
Kesimpulan

Sebagai salah seorang murid Bernouli, L'hospital boleh dikatakan sebagai murid yang tidak berbakti. Beberapa karya Bernouli diaku dan diterbitkan oleh L'Hospital yang memang kaya dan beruntung. Karya orisinalnya mungkin adalah tentang teori infinitesimal yang mengatakan bahwa jika dua besaran dibedakan suatu bilangan yang sangat kecil, mereka dapat dipandang sebagai sama. Oleh orang – orang jenius seperti Newton, Leibniz, Bernouli, dan Euler ide ini digantikan oleh penemuan limit, tetapi ide ini kembali dihidupkan oleh cabang matematika baru saat ini yang disebut analisis tak baku.

APLIKASI

Kasus:
seorang konglomerat berencana untuk berinvestasi di kompleks perumahan Madu Kismo, pertimbangannya adalah kompleks tersebut berada di pinggir jalan yang ramai sehingga akan sangat strategis apabila dibangun ruko. Pihak kompleks perumahan Madu Kismo memberi harga kepada konglomerat tersebut sebagai berikut: Rp 5000 / m sisi horizontal dan Rp 2000 / m sisi vertical, dan luas maximum yang bisa diambil adalah 100.000 m^2
Permasalahan*: anda sebagai seorang consultant diminta untuk menentukan berapa ukuran tanah yang harus dia beli untuk meminimumkan harga belinya.*
Solusi:

Pertama kali yang anda lakukan adalah menggambarkan kasus tersebut sbb:



Pihak Perumahan Madu Kismo memberikan harga Rp 5000 / m horizontal dan Rp 2000 / m vertical, berarti biaya yang harus dikeluarkan oleh konglomerat tersebut dapat dituliskan sbb:

$$B = 5000x + 2000y \quad \text{...}(1)$$

pihak perumahan Madu Kismo juga memberikan batasan bahwa luas tanah yang bisa diambil adalah 100.000 m^2 yang dapat dituliskan sbb:

$$xy = 100000$$

$$y = \frac{100000}{x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

kita akan memasukkan persamaan (2) ke dalam persamaan (1) menjadi

$$B = 5000x + 2000\left(\frac{100000}{x}\right)$$

$$B = 5000x + \frac{200000000}{x}$$

kita akan mencari titik stasioner persaman tersebut dengan mengikuti aturan

$$B'(x) = 0$$

$$5000 - 200000000x^{-2} = 0$$

$$5000 = \frac{200000000}{x^2}$$

$$x^2 = \frac{200000000}{5000} = 40000$$

$$x = \pm 200$$

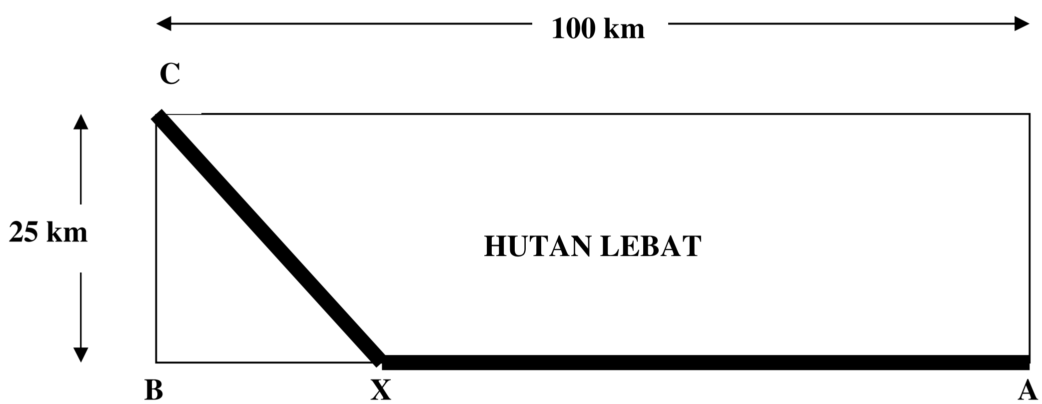
kita akan ambil x = 200 (karena angka -200 tidak berarti), dan akan melakukan test apakah nilai ini memang membuat Biaya menjadi minimum. Test bisa dilakukan dengan melakukan **uji turunan kedua** (yaitu apabila hasilnya lebih dari nol berarti nilai itu adalah pembuat minimum).

$$B''(x) = \left.\frac{400000000}{x^3}\right]_{x=200} = \frac{400000000}{(200)^2} = 50 \qquad (\text{ lebih dari nol })$$

ternyata setelah kita melakukan **uji turunan kedua** kita mendapatkan nilai yang lebih dari nol (berarti memenuhi persyaratan untuk pembuat minimum) sehingga nilai x = 200 adalah pembuat minimum. Dengan memasukkan nilai ini ke persamaan (2) kita mendapatkan y = 500. sehingga harga beli konglomerat tersebut dapat kita minimumkan dengan membeli x = 200 dan y = 500 yang berarti konglomerat tersebut harus menyiapkan biaya sebesar B = 5000 (200) + 2000 (500) = 2000000 rupiah.

Selamat anda bisa mengirimkan analisis ini ke konglomerat tersebut, dan jangan lupa anda meminta hak anda yaitu komisi 10 % ☺

Kasus:
PT ANEKA TAMBANG berencana untuk membuat pipa yang menyalurkan minyak dari titik A (sumber) ke titik C (perusahaan) melewati hutan lebat. Seperti tertampil pada gambar dibawah ini.



Pihak BOD (Board of Director) menginginkan pipa dari A ke C, akan melewati pinggir hutan (AX) dan pada satu titik tertentu (X) memotong hutan (XC). Dari pihat konstruksi sendiri menawarkan biaya Rp 100.000 / km melewati pinggir hutan dan Rp 200.000 / km memotong hutan.

Permasalahan
Kebetulan anda adalah analisis system di PT ANEKA TAMBANG, dan harus membuat presentasi ke BOD tentang biaya yang diperlukan untuk mengimplementasikan pipa tersebut dengan biaya minimum.

Solusi:
Pertama yang bisa anda lakukan adalah membuat persamaan untuk biayanya dengan memperhatikan parameter – parameter berikut:

Misalkan BX = x maka
AX = 100 – BX = 100 – x ………………..(1)

<u>Lihat segititiga XBC:</u>
Teorema phythagoras mengatakan bahwa

$$XB^2 + BC^2 = XC^2$$

$$x^2 + (25)^2 = XC^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$XC = \sqrt{x^2 + (25)^2}$$

dari persamaan (1) dan (2) kita dapat menentukan biaya implementasi pipa adalah

$$B = 100000AC + 200000XC$$
$$B = 100000(100 - x) + 200000\sqrt{x^2 + (25)^2}$$
$$B = 100(100 - x) + 200\sqrt{x^2 + 625}(dalam\_ribuan)$$
$$B = 10000 - 100x + 200(x^2 + 625)^{1/2}$$

untuk mencari nilai pembuat minimum kita lakukan **uji turunan pertama**

$$B'(x) = 0$$
$$-100 + 200\left(\frac{1}{2}\right)(x2 + 625)^{-1/2}(2x) = 0$$
$$-100 + \frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} = 0$$
$$\frac{200x}{(x^2 + 625)^{1/2}} = 100$$
$$\frac{200x}{100} = (x^2 + 625)^{1/2}(kwadratkan\_kedua\_sisi)$$
$$4x^2 = x^2 + 625$$
$$3x^2 = 625$$
$$x^2 = \frac{625}{3} = 208.33$$
$$x = \pm 14,43$$

kita mendapatkan nilai x = 14, 43 dan dengan **uji turunan kedua** kita bisa membuktikan bahwa nilai ini adalah pembuat minimum (B"(14,43) > 0)

berarti biaya minimum yang perlu dikeluarkan oleh PT ANEKA TAMBANG untuk implementasi pipa adalah

$$B = 10000 - 100x + 200\sqrt{x^2 + 625}(dalam\_ribuan)$$
$$B = 10000 - 100(14,43) + 200\sqrt{14,43^2 + 625}(dalam\_ribuan)$$
$$B = 14329(dalam\_ribuan)$$
$$B = 14329000$$

biaya minimum yang perlu dikeluarkan adalah Rp 14.329.000 .

Bravo ☺ anda telah membuat analisis mengagumkan yang akan meningkatkan karier anda di perusahaan.

PENUTUP

Buku BASIC CALCULUS FOR STUDENTS: *mengenal kalkulus dengan pendekatan filosofis* ini diharapkan dapat memberikan dasar wacana terhadap pelajaran matematika di SMA. Sehingga penyampaian maupun penyerapan materi menjadi lebih menyenangkan dan tidak mematikan imaginasi maupun kreatifitas siswa maupun pengajar.

Akhir kata

Penghargaan tertinggi saya haturkan kepada Tuhan, mama, kakak , dan honey "elfira sidharta" . Selanjutnya ucapan ucapkan terima kasih saya ucapkan kepada penerbit Gava Media, para guru, teman, dan murid-murid saya.

Segala saran, kritik , dan masukan yang membangun bisa dilewatkan www.fendynovento.com atau dengan mengirimkan email ke admin@fendynovento.com

DAFTAR PUSTAKA

- Kalkulus dan Geometri Analitik: edisi keempat, jilid 1, Edwin Purcell, Dale Varberg, Erlangga, Jakarta
- Aplied Mathematics for business, economics, and the social scince, 4th edition, Frank S Budnic, McGraw Hill Inc, 1993
- Sejarah Matematika Klasik dan modern, Salah Kaduri Haza's, Dyastriningrum S, Ibnu Ngathoillah, UAD PRESS, 2004